**TC 7-8. Probleme de optimizarea portofoliilor. Abordări clasice**

Considerăm disponibil istoricul randamentelor procentuale pe *m* perioade de timp pentru fiecare acţiune dintr-un grup de *n* acţiuni şi notăm cu

* , randamentul acţiunii *i* în perioada *j*;
* , fracţiunea investită în acţiunea *i*, astfel încât
* , varianţa acţiunii *i*;
* , covarianţa dintre acţiunile *i* şi *k*.

Portofoliul este definit de fracţiunile de investiţii .

Randamentul mediu al fiecărei acţiuni , notat cu , este calculat prin

*Randamentul aşteptat al portofoliului* este dat prin

Varianţa fiecărei acţiuni , respectiv covarianţa dintre oricare două acţiuni , sunt calculate prin

Varianţa portofoliului este definită prin

şi este utilizată ca *măsură a riscului portofoliului*.

Funcţiile randament, respectiv risc, definite prin relaţiile (4.2), respectiv (4.5) sunt reprezentate matriceal prin

unde

De asemenea, în reprezentare matriceală relaţia

devine

unde este vectorul unitar *n*-dimensional.

Problema primară de minimizare a riscului, RISCMIN0, este formulată prin (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RISCMIN0:

Minimizează

cu restricţia

**Observaţie**. RISCMIN0 poate fi modificată prin eliminarea restricţiei şi a variabilei :

În multe situaţii practice, investitorul este interesat atât în minimizarea riscului, cât şi în optimizarea randamentului portofoliului ales. *În general, un portofoliu este considerat optim dacă el furnizează cel mai mare randament cu cel mai mic risc.*

O modalitate de a determina un astfel de portofoliu este prin considerarea funcţiei de tip compozit

unde constanta pozitivă controlează raportul dintre randament şi risc. Cu aceste modificari se obţine problema de optimizare RISC-RANDAMENT1, (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RISC-RANDAMENT1:

Minimizează

cu restricţia

**Observaţie**. RISC-RANDAMENT1 poate fi modificată prin eliminarea restricţiei şi a variabilei .

O variantă alternativă pentru a determina portofoliul optim este de a fixa o valoare ţintă pentru randament, de exemplu de *Rp* procente, şi de a considera problema de optimizare RISCMIN1, (Bartholomeu-Biggs, 2005):

RISCMIN1:

Minimizează

cu restricţiile

*Exemplul 2*

În cadrul acestui exemplu au fost folosite date reale, selectate de pe Bursa de Valori din Londra, pe 20 de perioade de timp cuprinse între anii 2002 şi 2003. Vectorului medie a randamentelor şi a matricei de covarianţă sunt disponibile în (Bartholomeu-Biggs, 2005) şi au următoarele valori,

**Observaţie**. În cazurile reale, istoricul evoluţiei randamentelor acţiunilor poate înregistra şi valori negative şi, de asemenea, matricea de covarianţă poate avea valori mult mai mari decât în cazul datelor generate artificial (cum este cazul exemplului 1).

Problema este modelată în termenii RISCMIN1M.

Prin aplicarea metodelor de tip gradient, respectiv Newton prezentate, pentru eroarea permisă , rezultă

* portofoliul
* riscul minim
* randamentul , randamentul dat.

**Observaţie**. Pentru aceeaşi eroarea permisă, , testele indică faptul că numărul de iteraţii ale metodei celei mai rapide descreşteri este de ordinul sutelor (în implementarea cu  constantă este de ordinul miilor), în timp ce metoda Newton necesită câteva zeci de iteraţii.

Următoarea funcţie MATLAB implementează o metodă de tip gradient în care  constantă. Este tratat separat cazul în care este disponibil istoricul acţiunilor şi cazul în care sunt cunoscute randamentul mediu şi matricea de covarianţă (similar exemplului 2).

function [y]=GRAD\_riscmin1(nume,ro,Rp,eps,NM,caz);

% GRAD\_riscmin1('portofoliu1.txt',100,1.15,10^-5\*sqrt(5),50000,0);

% GRAD\_riscmin1('',10,0.25,10^-5\*sqrt(5),10000,1);

% nume=numele fisierului din care sunt prelute datele

% ro=din functia obiectiv

% Rp=randamentul prognozat

% NM=numarul de iteratii

% eps = eroarea maxima admisa

% caz=0 daca preiau date din fisier, altfel este 1

if(caz==0)

R=citeste\_date(nume);

[n,m]=size(R);

[Q,rmed,alpha,B]=parametri(R);

else

n=5;

In1=eye(n-1);

ul=-ones(1,n-1);

B=[In1; ul];

alpha=zeros(n,1);

alpha(n)=1;

rmed=[-0.028, 0.366, 0.231, -0.24, 0.535]';

Q=[1.0256 -0.4340 0.0202 -0.1968 -0.0311;

-0.4340 1.1049 -0.0783 0.2347 -0.1776;

0.0202 -0.0783 0.4328 -0.1236 -0.1895;

-0.1968 0.2347 -0.1236 8.0762 1.0093;

-0.0311 -0.1776 -0.1895 1.0093 2.9007];

end;

% calcul matrice Hessian

H=2\*B.'\*Q\*B+2\*(ro/(Rp^2))\*(B.'\*rmed)\*(B.'\*rmed).';

% disp(H);

[V,D]=eig(H);

% valoarea proprie maxima a matricei Hessian pentru stabilirea

% valorii cu care este actualizat xk din teorema de convergenta

Maxim=max(max(D));

rata=1/(Maxim);

k=1;er=1;

x0=ones(n-1,1);

x0=x0/(n-1);

while((k<=NM)&&(er>=eps))

val=fgrad(Q,rmed,alpha,B,ro,Rp,x0);

er=norm(val);

x=x0-rata\*val;

x0=x;

k=k+1;

end;

disp(['Eroarea: ' num2str(er)]);

[vall,V]=fobiectiv(Q,rmed,alpha,B,ro,Rp,x);

y=alpha+B\*x;

disp('Portofoliul calculat:');disp(y);

disp(['Riscul minim calculat: ' num2str(V)]);

disp(['Randamentul calculat: ' num2str(rmed.'\*y)]);

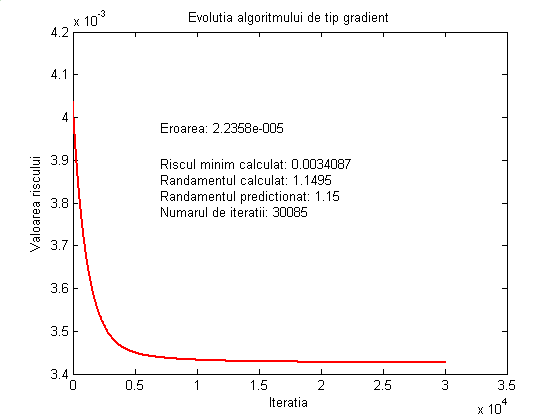
disp(['Randamentul predictionat: ' num2str(Rp)]);

disp(['Numarul de iteratii: ' num2str(k)]);

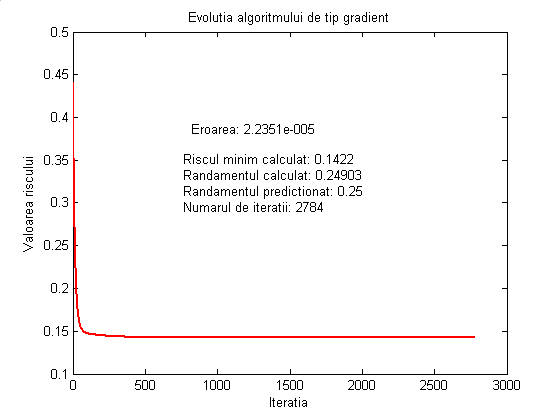
end

În continuare sunt prezentate evoluţiile algoritmului de tip gradient pentru fiecare din cele două exemple considerate.

GRAD\_riscmin1('portofoliu1.txt',100,1.15,10^-5\*sqrt(5),50000,0);



La apelul GRAD\_riscmin1('',10,0.25,10^-5\*sqrt(5),10000,1);

**